Le principe de moindre action et l'origine du Lagrangien[1]

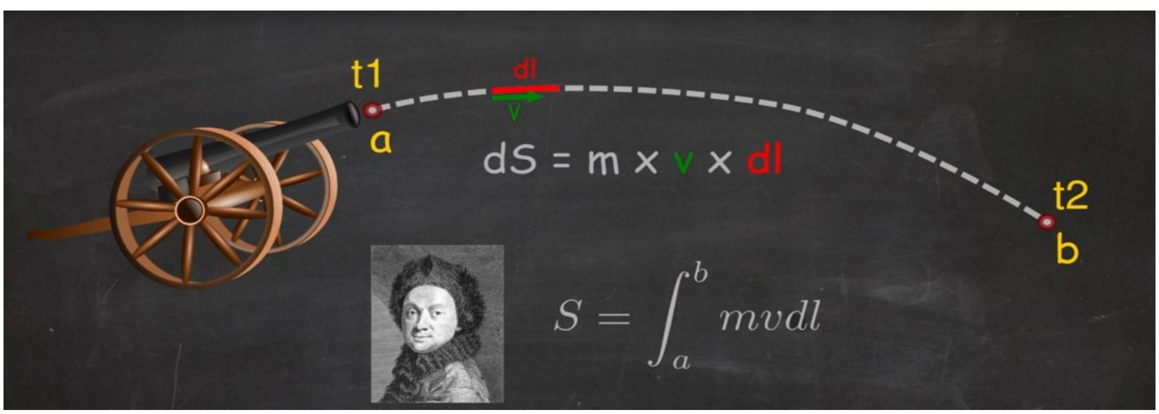
En 1744, en s'inspirant du principe de moindre temps de **Fermat** (1601-1665) (en optique géométrique), Pierre-Louis Moreau de **Maupertuis** (savant français né en 1698 et mort en 1759) a établi son principe dit : ***principe de moindre quantité d'action*****, selon lequel *« la nature choisissait, parmi toutes les possibilités qui s'offraient à elle, celle qui était la plus efficace*** *(Mém. Acad. Berlin, 1744) ».*

Maupertuis voit le mouvement d'un corps rigide dans sa globalité: il ne considère que les points de départ et d'arrivée, contrairement à Newton, qui procède, à l'aide de son équation différentielle de mouvement, de proche en proche pour déterminer la trajectoire du corps en mouvement, sous l'effet de forces.

Pour Maupertuis, cette efficacité exprimait, dans le cas du mouvement, ***une trajectoire qui minimise l'intégrale de la quantité de mouvement sur le trajet*** et la traduisait mathématiquement comme suit:

Si on considère le mouvement d'un corps rigide de masse m entre deux points A en temps tA et B en temps tB pour une énergie totale E donnée (constante durant le mouvement), la trajectoire physique sélectionnée par la nature est celle pour laquelle la grandeur physique (appelée action et inventée par Maupertuis lui-même): $\boldsymbol{A = \int_A^B mv \cdot dl}$

est minimale, ou mv est la quantité de mouvement (introduite par Descartes) et dl un élément d'espace entre les deux points A et B. Cette forme est valable lorsque l'énergie est conservée tout au long du trajet..



Il a écrit dans ce sens : « ***lorsqu'il arrive quelque changement dans la nature, la quantité d'action employée pour ce changement est toujours la plus petite qu'il soit possible*** » (principe d'optimalité de la nature).

1. Formalisme de Lagrange: équation d'Euler-Lagrange par le calcul variationnel : https://www.youtube.com/watch?v=RILKEmoonA8&list=PLe3sI3PvCIaIErnLE96Ke7sjdgvHD88rI&index=14

En remarquant que

$$dl = \; v\,dt$$

On obtient alors

$$A = \int_{tA}^{tB} mv \cdot v\,dt \;=\; \int_{tA}^{tB} mv^2\,dt \;=\; \int_{tA}^{tB} 2\,T\,dt$$

T énergie cinétique de la masse.

L’action de Maupertuis dépend de la seule énergie cinétique du corps, ce qui peut sembler un peu restrictif d’un point de vue de la représentativité de l’action de Maupertuis du mouvement puisque le mouvement d’un corps rigide prend source dans la variation de son énergie potentielle.

C’est ainsi que quelques années plus tard, **Leonard Euler** (1707-1783) proposa une autre forme de la grandeur *action*, en se basant sur l’idée que les corps rigides en mouvement tendent à adopter un état où l’énergie potentielle est minimale. L’action d’Euler dépend donc de l’énergie potentielle du corps rigide en mouvement. Euler généralise le raisonnement en montrant que l’on peut chercher l’extremum d’intégrales plus générales, ouvrant la voie à la forme T−U adoptée ensuite par Lagrange.

Vint alors Joseph-Louis **Lagrange** (1736-1813), qui a pu concilier les deux points de vue, en proposant, par intuition, comme ***action l’intégrale de la différence entre l’énergie cinétique et l’énergie potentielle*** du corps rigide en mouvement.

$$S = \int_{tA}^{tB} [T - U]\,dt$$

$$L = \; [T - U] \; est\ le\ Lagrangien\ du\ système$$

Remarque : Lagrange lui-même a donné la notation Z à la quantité **T-U**, et ce n’est qu’après, que le **Lagrangien** ait pris la notation **L**, en hommage à Lagrange.

En fait, Lagrange a bien compris que le mouvement d’un corps rigide (avec une énergie totale conservée) est le résultat de la compétition entre deux grandeurs physiques que sont l’énergie cinétique et l’énergie potentielle: un corps en mouvement voulant augmenter son énergie cinétique voit son énergie potentielle diminuer. Il a sûrement remarqué que s'il proposait comme action l'intégrale de la somme des énergies cinétique et potentielle, cela n'ajouterait rien au problème, puisque l'énergie totale est supposée constante !!!

Lagrange annonça en 1788 son ***principe de moindre action selon lequel le chemin physique que la nature choisit pour un corps rigide passant d'un point A au temps*** t_A ***vers un point B au temps*** t_B ***est celui pour lequel l'action S est minimale (stationnaire).***

En effet, on peut établir un lien entre l'expression de l'action de Maupertuis A et celle proposée par Lagrange S en faisant remarquer que :

$$2T = T + T = E - U + T$$

$$A = \int_{tA}^{tB} 2T\,dt = \int_{tA}^{tB} (E + T - U)\,dt = \int_{tA}^{tB} (E)\,dt + \int_{tA}^{tB} (T - U)\,dt$$

Puisque l'énergie totale E est constante dans un système conservatif, nous pouvons donc écrire :

$$A = E(t_B - t_A) + S$$

Le terme E $(t_B - t_A)$ est identique pour toutes les trajectoires possibles entre les points A et B. Cela signifie qu'il ne permet pas de distinguer entre les différentes trajectoires, car il n'affecte pas la minimisation de l'action. Minimiser A revient à minimiser S. Par conséquent, nous pouvons le considérer comme une constante et *l'omettre de l'expression de l'action lorsque nous cherchons à déterminer la trajectoire réelle*. Ainsi, à une constante près, nous retrouvons :

$$A = S + constante$$

Prenons maintenant le cas simple d'un Lagrangien L qui ne dépend que d'une seule coordonnée généralisée, $L(q, \dot{q})$ et appliquons les résultats de calcul variationnel ci-dessous:

$$S[q(t)] = \int_{tA}^{tB} L(q, \dot{q})\,dt$$

pour que S[q(t)] soit stationnaire (maximal ou minimal), la condition suivante doit être vérifiée :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

C'est l'équation d'Euler-Lagrange pour un système conservatif à un degré de liberté. Sa résolution permet d'obtenir l'expression de la coordonnée généralisée q(t) représentant le mouvement du corps.

Dans le cas d'un système conservatif à n degré de liberté, on aura n équations différentielles permettant de définir les expressions des q(t) :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Définition de l'action :

$$S = \int_{t1}^{t2} L(q_1(t), \dots q_n(t), \dot{q}_1(t), \dots \dot{q}_n(t), t)\, dt$$

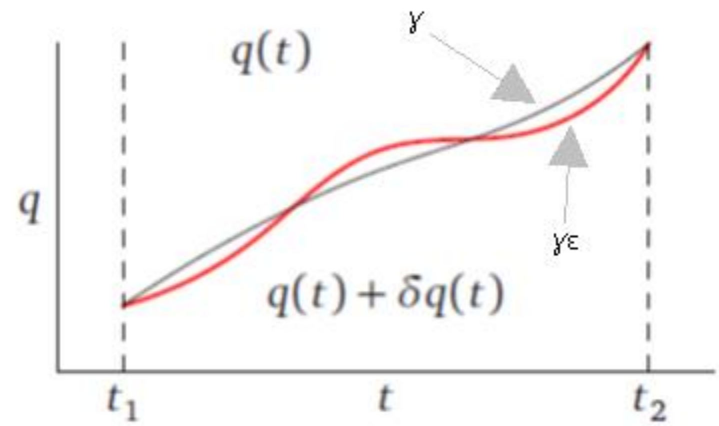
Et selon une seule coordonnée

$$S = \int_{t1}^{t2} L(q_1, \dot{q}_1, t)\, dt$$

L'action S est l'intégrale du lagrangien dans le temps pris entre un certain temps t_1 et un certain temps t_2. Le lagrangien est fonction des coordonnées q_1 à q_n dépendantes du temps et des vitesses dépendantes du temps et le lagrangien peut aussi dépende explicitement du temps.

Le principe de la moindre action stipule que le mouvement suivi par le système et qui donc respecte les équations de Lagrange est celui qui minimise l'intégrale appelée *action*.

Nous cherchons une formule qui minimise l'action. Nous cherchons un extremum.



Soit γ une trajectoire physique.

Soit γ_ε une variation de γ avec comme coordonnées

$$\gamma_\varepsilon(t) = (q^1(t,\varepsilon), \dots, \dot{q}^n(t,\varepsilon))$$

L'action est

$$S(\gamma_\varepsilon) = \int_{t1}^{t2} L\big(q^i(t,\varepsilon), \dot{q}^i(t,\varepsilon), t\big)\, dt$$

$$\delta S = S(\gamma_\varepsilon) - S(\gamma) = \int_{t1}^{t2} L\big(q^i(t,\varepsilon), \dot{q}^i(t,\varepsilon), t\big)\, dt - \int_{t1}^{t2} L\big(q^i(t), \dot{q}^i(t), t\big)\, dt$$

Cette différente est très petite, alors nous pouvons faire un développement limité au premier ordre en q^i. Ce qui revient à dire que la dérivée est nulle.

Principe de moindre action -> On impose que $\boldsymbol{\delta S = 0}$ au premier ordre en $\boldsymbol{\delta q^i}$

Principe de moindre action -> Pour toute $\boldsymbol{\gamma_\varepsilon}$ variation de $\boldsymbol{\gamma}$

$$\left(\frac{\boldsymbol{d\,(s(\gamma_\varepsilon))}}{\boldsymbol{d\varepsilon}}\right)\Big|_{\boldsymbol{\varepsilon=0}} = \mathbf{0}$$

La dérivée de $S(\gamma_\varepsilon)$ par rapport à ε est :

$$\left(\frac{d\,(s(\gamma_\varepsilon))}{d\varepsilon}\right)\Big|_{\varepsilon=0} = \int_{t1}^{t2} \left(\frac{\partial q^i}{\partial \varepsilon}\frac{\partial L}{\partial q^i} + \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \varepsilon}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\Big|_{\varepsilon=0}\, dt$$

Intégration par parties pour éliminer les dérivées de $\dot{q}^i$.
Le but est de se débarrasser du terme contenant $\dot{q}^i$ pour obtenir une expression dépendant uniquement de q^i.

On utilise l'identité suivante :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q^i}{\partial \varepsilon}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \varepsilon}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial q^i}{\partial \varepsilon}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)$$

Cette identité permet de réécrire

$$\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \varepsilon}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q^i}{\partial \varepsilon}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial q^i}{\partial \varepsilon}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)$$

$$\left(\frac{d\left(s(\gamma_\varepsilon)\right)}{d\varepsilon}\right)\Big|_{\varepsilon=0} = \int_{t1}^{t2}\left(\frac{\partial q^i}{\partial \varepsilon}\frac{\partial L}{\partial q^i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q^i}{\partial \varepsilon}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial q^i}{\partial \varepsilon}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\right) dt$$

Quand nous avons une variation, l'intégrale d'une dérivée aux bornes t_1 et t_2. Ce terme-là ne peut pas dépendre de ε. ε = 0 aux bornes.

$$\int_{t1}^{t2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q^i}{\partial \varepsilon}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) dt$$

Théorème fondamental de l'analyse
L'intégrale d'une dérivée est la différence des bornes.

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\left(f(t)\right) dt = f(b) - f(a)$$

Ici $f(b) = f(a)$, ce qui implique

$$\int_{t1}^{t2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q^i}{\partial \varepsilon}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) dt = 0$$

Donc

$$\left(\frac{d\left(s(\gamma_\varepsilon)\right)}{d\varepsilon}\right)\Big|_{\varepsilon=0} = \int_{t1}^{t2}\left(\frac{\partial q^i}{\partial \varepsilon}\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial q^i}{\partial \varepsilon}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\right) dt$$

Écrit autrement

$$\left(\frac{d\left(s(\gamma_\varepsilon)\right)}{d\varepsilon}\right)\Big|_{\varepsilon=0} = \int_{t1}^{t2} \frac{\partial q^i}{\partial \varepsilon}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\right) dt \ = 0$$

Vrai pour toute variation de γ

Implique que

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\right) = 0$$

C'est l'équation d'**Euler-Lagrange** pour un système conservatif.

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)$$

L'action n'est pas toujours minimisée ; elle peut correspondre à un maximum ou un point selle. Le fait que la variation première soit nulle ne garantit qu'un extremum (un point stationnaire).