Les unités de Planck

En physique, le système d'unités de Planck est un système d'unités de mesure défini uniquement à partir de constantes physiques fondamentales. Il a été nommé en référence à Max Planck, qui l'introduisit (partiellement) à la fin de l'article présentant la constante qui porte à présent son nom, la constante de Planck.

Pour exprimer le comportement de la nature, nous faisons appel à 3 notions qui sont

- La vitesse
- La masse
- La dimension

Ces 3 notions font, chacune, appel à une théorie en particulier. Chacune de ses théories est basée sur une constante fondamentale. Une constante fondamentale est une grandeur fixe, intervenant dans les équations de la physique, qui ne peut pas être déterminée par une théorie sous-jacente. Elles sont déterminées de façon empirique.

- Pour la vitesse, il y a la théorie de la relativité restreinte
    - $\boldsymbol{c = 2,99792458 * 10^{8} \ \frac{m}{s}}$
- Pour la masse, il y a la théorie de la gravitation
    - $\boldsymbol{G \ = 6,6743 * \ 10^{-11} \ \frac{m^3}{kg.s^2}}$
- Pour la dimension, il y a la théorie de la mécanique quantique
    - $\hbar = \boldsymbol{\frac{h}{2\pi} = 1,05457181765 * \ 10^{-34} \ \frac{kg\, m^2}{s}}$

Nous cherchons à **définir un nouveau système d'unités basé seulement sur les valeurs de ces constantes fondamentales**. Les physiciens appellent ce système d'unités, le « système d'unités naturelles ».

Le processus pour aboutir à ce système d'unités passe par l'analyse dimensionnelle. Le processus est simple, mais un peu long. Pour les détails, je vous renvoie au document « Unités de Planck : Analyse dimensionnelle » et à la vidéo de Brian Greene qui démontre la démarche à suivre.

Your Daily Equation #15: The Planck Length - Why String Theory is Hard to Test (27:17)
https://www.youtube.com/watch?v=1MRGJwdeie0&list=PLKy-B3Qf_RDVL6Z_CmgKf0tAbpXTua9mV&index=28&t=359s

Une autre démonstration de qualité
Planck Units - Part 1 of 3…
https://www.youtube.com/watch?v=uaN8uM_2_sk

__**Les unités de Planck qui nous intéressent ici sont**__

Pour la longueur, $\boldsymbol{l_p}$: dénommée **longueur de Planck**

$$\boxed{\boldsymbol{l_p = \sqrt{\frac{G\,\hbar}{c^3}}}}$$

$$\boldsymbol{l_p = 1,616255024E - 35\ m}$$

Pour le temps, $\boldsymbol{t_p}$: dénommé **temps de Planck**

$$\boxed{\boldsymbol{t_p = \sqrt{\frac{G\,\hbar}{c^5}}}}$$

$$\boldsymbol{t_p = 5,391246448E - 44\ s}$$

Pour la masse, $\boldsymbol{m_p}$: dénommée **masse de Planck**

$$\boxed{\boldsymbol{m_p = \sqrt{\frac{\hbar\,c}{G}}}}$$

$$\boldsymbol{m_p = 2,176434343E - 8\ kg}$$

Le processus semble seulement changer un système d'unités en un autre système d'unités. Il s'avère que le nouveau système d'unités dévoile des éléments très fondamentaux de la nature.

Au premier coup d'œil, nous remarquons que $\boldsymbol{l_p}$ diffère de $\boldsymbol{t_p}$ que d'un multiple de $\boldsymbol{c}$.

$$\boxed{\boldsymbol{l_p = c\ t_p}}$$

l_p est équivalent à la distance parcourue par la lumière pendant le temps de Planck.

Nous pouvons définir G en fonction des unités naturelles

Pour usage ultérieur, établissons G en fonction de lp

$$l_p^2 = \frac{G\,\hbar}{c^3}$$

$$\boxed{\boldsymbol{G = \frac{l_p^2\, c^3}{\hbar} \quad = \frac{2\,\pi\, l_p^2\, c^3}{h}}}$$

Remplaçons la masse de Planck $\boldsymbol{m_p}$ par son équivalent en fréquence énergétique $\boldsymbol{f_p}$ pour une particule au repos

$$m_{0_P} = \frac{h\, f_{0_p}}{c^2}$$

$$\frac{h\, f_{0_p}}{c^2} \;=\; \sqrt{\frac{\hbar\, c}{G}}$$

$$\frac{h^2\, f_{0_p}^2}{c^4} \;=\; \frac{\hbar\, c}{G}$$

Isolons f_p

$$f_{0_p}^2 = \frac{h\, c\, c^4}{2\,\pi\, G\, h^2}$$

$$f_{0_p}^2 = \frac{c^5}{2\,\pi\, G\, h}$$

Remplaçons G par son équivalent en unités de Planck

$$f_{0_p}^2 = \frac{c^5 h}{2\,\pi\, 2\,\pi\, l_p^2\, c^3\, h}$$

Simplifions

$$f_{0_p}^2 = \frac{c^2}{2^2\, \pi^2\, l_p^2}$$

Fréquence énergétique de Planck $\boldsymbol{f_{0_p}}$ pour une particule au repos

$$\boxed{\boldsymbol{f_{0_p} = \frac{c}{2\,\pi\, l_p}}} \qquad \boxed{\boldsymbol{f_{0_p} \;=\; 2.95209919668E+42\ Hz}}$$

Exprimons l'énergie de la particule sous la forme de la longueur d'onde au repos

En partant de

$$\lambda_0 = \frac{c}{f_0} \quad => \quad \frac{c}{f_{0_p}} \quad = \frac{c \; 2\,\pi \; l_p}{c}$$

nous pouvons définir λ_{0_p}

$$\boxed{\boldsymbol{\lambda_{0_p} = \; 2\,\pi \; l_p}}$$

Longueur d'onde de Planck

$$\boldsymbol{\lambda_{0_p} = \; 2\,\pi \; l_p}$$

$\boldsymbol{\lambda_{0_p}}$ = **1,0155229822114E-34 m**

$\boldsymbol{2\,\pi \; l_p \; est}$ é$\boldsymbol{gale}$ à $\boldsymbol{un \; cycle \; complet \; de \; l'onde.}$

Fait à noter : l'onde serait stationnaire si elle se retrouvait sur un cercle de rayon $\boldsymbol{l_p}$

ou dans un puits de carré infini de longueur égale à $2\,\pi \; \boldsymbol{l_p}$

Réécrivons en fonction de l_p

$$\boxed{\boldsymbol{l_p \; = \frac{\lambda_{0_p}}{2\,\pi}}}$$

l_p est aussi la longueur d'onde de Compton réduite d'une particule ayant la masse de Planck. Formulation que l'on retrouve dans les écrits.

La relativité générale dit que, associé à toute masse m, il existe une longueur appelée rayon de Schwarzschild R_s, de sorte que la compression d'un objet de masse m à une taille plus petite ou égale que cela entraîne la formation d'un trou noir.

Est-ce qu'une particule ayant la masse de Planck et que celle-ci est comprise dans une sphère de rayon $\boldsymbol{l_p}$, est un trou noir ?

Selon la formule du rayon de Schwarzschild

$$R_s = \frac{2\ G\ m_{0_p}}{c^2}$$

$$R_s = \frac{2 * 6.6743E - 11 *\ 2.176434343E - 8}{(2.99792458E + 08)^2}$$

$$R_s = 3{,}2325100488474E - 35\ m$$

$$l_p = 1{,}616255024E - 35\ m$$

$$\boldsymbol{R_s > l_p}$$

Une particule ayant la masse de Planck et que celle-ci est comprise dans une sphère de rayon $\mathbf{l_p}$, est un bien trou noir.

Quelle serait la masse critique pour obtenir un trou noir, pour une sphère de rayon $\boldsymbol{l_p}$?

$$R_s = \frac{2\ G\ m}{c^2}$$

$$m = \frac{c^2 R_s}{2\ G}$$

$$m = \frac{c^2 l_p}{2\ G}$$

$$m = \frac{(2.99792458E + 08)^2 *\ 1{,}616255024E - 35}{2 * 6.6743E - 11}$$

masse critique pour un trou noir de rayon lp

$$m_{crt_{trou\ noir}} = 1{,}088217171359E - 8\ Kg$$

$$\frac{m_{crt_{trou\ noir}}}{m_p} = \frac{1{,}088217171359E - 8\ Kg}{2.176434343E - 8\ kg}$$

La masse critique est exactement la moitié de la masse de Planck.

Nous cherchons ici la plus petite particule observable et sans qu'elle soit un trou noir. [1]

Nous devons donc trouver la particule qui occupera le moins d'espace. Due à son caractère ondulatoire, pour ne pas perdre son énergie, elle doit être stationnaire, confiné dans un espace de type puits carré infini de demi-longueur d'onde, soit un cercle dont la circonférence $2\,\pi\,R$ égale $\lambda_0/2$. Pour avoir la plus courte longueur d'onde, l'énergie, la masse de la particule, doit être la plus grande possible.

La masse doit être la plus grande possible, mais juste légèrement inférieure à la masse critique nécessaire pour former un trou noir.

Nous allons chercher la **masse critique** à partir du rayon de Schwarzchild R_s.
Donc

$$\boldsymbol{2\,\pi\,R_s = \frac{\lambda_0}{2}}$$

ou

$$4\,\pi\,R_s = \lambda_0 \quad => \qquad R_s = \frac{\lambda_0}{4\,\pi}$$

Selon l'équation d'incertitude de Heisenberg $\Delta E.\Delta t\ \geq\ \hbar/2$, pour que l'énergie soit maximale, le temps doit être minimal.

Pour le temps

$$\Delta E.\Delta t\ \geq \frac{\hbar}{2} \quad => \quad \Delta t\ \geq \frac{\hbar}{2\ \Delta E}$$

Comme Δt est un minimum, nous posons

$$t_{min} = \frac{\hbar}{2\,\Delta E}$$

$$t_{min} = \frac{\hbar}{2\ m_{max}\ c^2} \qquad (1)$$

Remplaçons la masse par son équivalent en fréquence énergétique

$$m_0 = \frac{h\ f_0}{c^2}$$

$$t_{min} = \frac{h\,c^2}{2\,\pi\,2\,h\,f_0\ \ c^2}$$

$$t_{min} = \frac{1}{4\,\pi\ \ f_{0_{max}}}$$

1. http://pragtec.com/physique/download/Calculs_interpretations_unites_Planck_df.php

En multipliant par « c » sur les 2 côtés de l'équation, nous obtenons une longueur

$$c\ t_{min} = \frac{c}{4\ \pi\ \ f_{0_{max}}}$$

$$c\ t_{min} = \frac{\lambda_{0_{min}}}{4\ \pi}$$

Cette longueur est un minimum

$$l_{min} = \frac{\lambda_{0_{min}}}{4\ \pi}$$

ou

$$2\ \pi\ l_{min} = \frac{\lambda_{0_{\min}}}{2}$$

La particule ayant la longueur d'onde $\lambda_{0_{\min}}$ serait stationnaire sur un cercle de rayon l_{min}

Nous ne voulons pas que la particule soit un trou noir, nous cherchons la masse critique, donc

$$l_{min} = R_s$$

En considérant la contrainte du trou noir, partons de la formule du rayon de Schwarzschild

$$R_s = \frac{2\ G\ m}{c^2}$$

et comme

$$R_s = l_{min} = c\ t_{min}$$

ceci implique que

$$c\ t_{min} = \frac{2\ G\ m}{c^2}$$

Isolons m

$$m = \frac{t_{min}\ c^3}{2\ G} \qquad (2)$$

En partant de (1) et (2)

$$t_{min} = \frac{\hbar}{2\, m_{max}\, c^2} \qquad et \qquad m = \frac{t_{min}\, c^3}{2\, G}$$

Nous remplaçons m_{max}

$$t_{min} = \frac{\hbar\, 2\, G}{2\, t_{min}\, c^3\, c^2}$$

$$t_{min} = \frac{G\, \hbar}{t_{min}\, c^5}$$

$$t_{min}^2 = \frac{G\, \hbar}{c^5}$$

Un dernier réarrangement et nous obtenons l'équation du **temps de Planck !**

$$\boxed{\boldsymbol{t_p} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{G}\, \hbar}{\boldsymbol{c^5}}}}$$

Multiplions c par t_p et nous obtenons l'équation de la **longueur de Planck**

$$\boxed{\boldsymbol{l_p} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{G}\, \hbar}{\boldsymbol{c^3}}}}$$

Pour usage ultérieur, établissons **G** par rapport à l_p

$$l_p^2 = \left(\frac{G\, \hbar}{c^3}\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{G} = \frac{\boldsymbol{l_p^2\, c^3}}{\hbar}} \qquad (3)$$

Cherchons la **masse du trou noir** pour un rayon égale à la longueur de Planck

$$R_s = l_p = \frac{2\,G\,m_{tn}}{c^2}$$

Isolons m_{tn}

$$m_{tn} = \frac{l_p\;c^2}{2\,G} \qquad (4)$$

Remplaçons l_p par $\sqrt{\frac{\boldsymbol{G}\,\hbar}{\boldsymbol{c^3}}}$, car nous voulons conserver que G , ħ, et c au final

Mettons l'équation au carré

$$m_{tn}^2 = \frac{l_p^2\;c^4}{4\,G^2}$$

Remplaçons l_p

$$m_{tn}{}^2 = \frac{G\,\hbar\;\;c^4}{c^3\;\;4\,G^2}$$

Simplifions

$$m_{tn}{}^2 = \frac{\hbar\,c}{4\,G}$$

Masse critique du trou noir

$$\boxed{\boldsymbol{m_{tn}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\sqrt{\frac{\hbar\,\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{G}}}} \qquad \boxed{\boldsymbol{m_{planck}} = \sqrt{\frac{\hbar\,\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{G}}}}$$

La masse du trou noir, dont le rayon est égal à lp, est la moitié de la masse de Planck.

La longueur de Planck et la demi-masse de Planck caractérisent la zone de transition entre la particule la plus petite observable et un trou noir. Si la particule n'a pas la demi-masse de Planck, elle n'est pas la plus petite. Si elle dépasse ou égale la demi-masse de Planck, c'est un trou noir.

Trouvons la fréquence énergétique et la longueur d'onde de la demi-masse de Planck.

Dans l'équation (4) de la masse du trou noir, remplaçons G (3) par son équivalent avec l_p

$$m_{tn} = \frac{l_p\ c^2}{2\,G} \quad et\ \ G = \frac{l_p^2\ c^3}{\hbar} = \frac{2\,\pi\,l_p^2\ c^3}{h} \quad =>$$

$$m_{tn} = \frac{l_p\ c^2\ h}{2\ 2\,\pi\,l_p^2\ c^3}$$

$$m_{tn} = \frac{h}{4\,\pi\,l_p\ c}$$

Remplaçons la masse du trou noir $m_{0_{tn}}$ par son équivalent en $f_{0_{tn}}$ pour une particule au repos

$$m_{0_{tn}} = \frac{h\,f_{0_{tn}}}{c^2}$$

$$\frac{h\,f_{0_{tn}}}{c^2} = \frac{h}{4\,\pi\,l_p\ c}$$

Isolons $f_{0_{tn}}$

$$f_{0_{tn}} = \frac{h\,c^2}{4\,\pi\,l_p\ c\ h}$$

$$f_{0_{tn}} = \frac{c}{4\,\pi\,l_p}$$

Fréquence énergétique de la particule pour le trou noir en fonction de lp

$$\boxed{\boldsymbol{f_{0_{tn}} = \frac{c}{4\,\pi\,l_p}}}$$

Exprimons l'énergie de la particule sous la forme de la longueur d'onde $\lambda_{0_{tn}}$

En partant de

$$\lambda_0 = \frac{c}{f_0} \quad => \quad \frac{c}{f_{0_{tn}}} = \frac{c\ 4\,\pi\ l_p}{c}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\lambda_{0_{tn}} = \ 4\,\pi\ l_p}}$$

Nous pouvons modifier l'équation comme suit :

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{\lambda_{0_{tn}}}}{\mathbf{2}} = \mathbf{2}\,\boldsymbol{\pi}\ \boldsymbol{l_p}}$$

$\boldsymbol{2\,\pi\ l_p\ est}$ é$\boldsymbol{gale}$ à $\boldsymbol{un\ demi\ cycle\ \ de\ l'onde.}$

L'onde serait stationnaire si elle se retrouvait sur un cercle de rayon $\boldsymbol{l_p}$

Conclusion : Une masse équivalente à la moitié de la masse de Planck qui se retrouve confinée dans une sphère de rayon $\boldsymbol{l_p}$ crée une courbure de l'espace-temps qui en fait un trou noir. C'est la masse critique. Ce qui nous donne la dimension limite inférieure, la frontière de l'observable sans être un trou noir.

Les paramètres établis au départ dictent que le temps est minimum et par l'équation de Heisenberg, cela implique que dans ce cas, l'énergie déduite de l'équation est un maximum. Et comme mentionné précédemment, lp est une longueur minimale.

Nous en déduisons que $\boldsymbol{m}$ est maximale, il en est de même pour la fréquence énergétique $\boldsymbol{f_0}$

$$t_p = \frac{\hbar}{2\,m\,c^2} \quad et\ m = h\frac{f_0}{c^2}\ \ =>$$

$$t_p = \frac{hc^2}{4\,\pi\ \ c^2\ h\,f_0}$$

$$\boxed{\boldsymbol{t_p} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}\,\boldsymbol{\pi}\,\boldsymbol{f}_{\mathbf{0}_{\boldsymbol{max}}}}} \qquad \boxed{\boldsymbol{f}_{\mathbf{0}_{\boldsymbol{max}}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}\,\boldsymbol{\pi}\,\boldsymbol{t_p}}} \qquad \boxed{\boldsymbol{f}_{\mathbf{0}_{\boldsymbol{max}}} = \mathbf{1.4760495983418}\boldsymbol{E} + \mathbf{42}\ \boldsymbol{hz}}$$

De $\boldsymbol{l_p}$ nous pouvons déduire la longueur d'onde ($\boldsymbol{\lambda_0}$) minimale

$$l_p = c\,t_p$$

$$l_p = \frac{c}{4\,\pi\,f_{0_{\max}}}$$

$$l_p = \frac{\lambda_{0_{min}}}{4\,\pi}$$

$$\lambda_{0_{min}} = 4\,\pi\,l_p$$

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{0}_{\boldsymbol{min}}}}{\mathbf{2}} = \mathbf{2}\,\boldsymbol{\pi}\,\boldsymbol{l_p}} \qquad \boxed{\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{0}_{\boldsymbol{min}}} = \mathbf{2{,}0310459644228}\boldsymbol{E} - \mathbf{34}\ \boldsymbol{m}}$$

$\boldsymbol{\lambda_{0_{min}} = 4\,\pi\,1{,}616255024E - 35\ m}$

Le fait que les unités de Planck représentent des limites physiques dictées par le principe d'incertitude d'Heisenberg fait en sorte que toutes les unités de Planck, de base ou secondaires, représentent en fait des limites physiques ou des caractéristiques pour lesquelles certains paramètres sont optimisés.

Nous pouvons donc retrouver les unités de Planck en nous basant sur la recherche de la particule ayant la dimension la plus petite sans être un trou noir.

Les constantes fondamentales en fonction des constantes naturelles

Les valeurs des constantes fondamentales sont le produit des constantes naturelles. Elles se retrouvent facilement à partir des unités MKS.
Pour les constantes fondamentales

- m => lp, longueur de Planck
- m/s =>c = lp/tp, longueur de Planck/temps de Planck
- kg => mp, masse de Planck

- $\boldsymbol{c} = 2{,}99792458 * 10^8 \ \frac{m}{s}$
  - o $\frac{m}{s} = c$ => $\boldsymbol{c = \frac{lp}{tp}}$
- $\boldsymbol{G} = 6{,}6743 * \ 10^{-11} \ \frac{m^3}{kg.s^2}$
  - o $\frac{m^3}{kg.s^2} \ => \ m * \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} * \frac{1}{\mathrm{kg}} => \mathrm{G} = \ \mathrm{lp}\frac{\mathrm{c}^2}{\mathrm{m_p}} => \ \mathbf{G} = \frac{\mathbf{lp^3}}{\mathbf{tp^2\ m_p}}$
- $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}05457181765 * \ 10^{-34} \ \frac{kg\ m^2}{s}$
  - o $\frac{kg\ m^2}{s} => kg\frac{m}{s}\ m => m_p * c * lp \ =>$ $\hbar = \boldsymbol{\frac{m_p\ lp^2}{tp}}$
  - o $h = m_p \ c \ 2\,\pi\, lp \ =>$ $\boldsymbol{h = \frac{m_p\ 2\,\pi\, lp^2}{tp}}$